Om

Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af første Art.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd., 8 Bd. IV.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

Om Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af første Art.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 8 B. IV.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1869.

De elliptiske Integralers udbredte Anvendelse gjör det ønskeligt, at Overgangen fra Differentialernes algebraisk irrationale Form til den trigonometriske Normalform gjöres saa let og hurtig som muligt, ja det er næsten en Betingelse for, at disse Funktioner og de omvendte deraf, Jacobis elliptiske Funktioner, en Gang skulle kunne blive almindelig Ejendom for dem, hvis praktiske Virksomhed kræver Mathematikkens Hjælp, at de nævnte Ændringer kunne udføres efter de simplest mulige Regler. I Almindelighed foregaae disse Ændringer paa den af Legendre (Théorie des Fonctions Ellipt. Chap. II) angivne Maade, senere modificeret af Richelot (Crelle Journ. 34. B. Side 16), idet Polynomiet af fjerde Grad under Qvadratrodstegnet først befries for Leddene med den uafhængige Variable i Potenser med ulige Exponenter, og først derefter de trigonometriske Funktioner indføres, i hvilken Henseende Richelots Fremgangsmaade ubetinget er den simpleste. Med Hensyn til den umiddelbare Overgang fra de irrationale Differentialers oprindelige Form til Normalformen er der af Richelot vel opstillet Tavler, der indeholde fornøden Vejledning, men Reglerne synes ikke simple nok, og de ere kun Resultater af en Kombination af de to omtalte Overgange. Det synes derfor vel at være Umagen værdt at gjöre denne Overgang til Gjenstand for en ny Undersøgelse, og derved at lægge Vægten, dels paa de endelige Reglers Simpelhed og Overskuelighed, dels paa den direkte Overgang fra den første Form til Normalformen. Det er Udbyttet af en saadan Undersøgelse, som forelægges her og som synes nogenlunde at fyldestgjöre de stillede Fordringer.

1. Antages

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \text{ idet } R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4, \tag{1}$$

at skulle bringes paa Normalformen for det første elliptiske Integral

$$C\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{2}$$

saa maa Behandlingen rette sig efter Beskaffenheden af Faktorerne af første Grad i R. Eftersom disse ere alle reelle, to reelle og to imaginære eller alle imaginære (α, β, γ, δ, ε forudsatte reelle), har man

$$\text{A.}\quad R = \varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d),$$
$$\text{B.}\quad R = \varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,((x-m)^2 + n^2)\ \text{eller}$$
$$\text{C.}\quad R = \varepsilon\,((x-m)^2 + n^2)\,((x-p)^2 + q^2),$$

idet a, b, c, d, m, n, p, q ere reelle.

2. A. I det givne Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)}} \tag{3}$$

skal $\Delta\,(k, \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ indbringes i Nævneren. Dertil kan benyttes Substitutionen

$$P\,\frac{x-a}{x-d} = \Delta^2\,(k, \varphi), \tag{4}$$

hvor P endnu er en ubekjendt Konstant. Da man af (4) faaer $\frac{dx}{(x-d)^2}$ udtrykt ved $\sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi$, maa Nævneren i (3) ogsaa bringes til at indeholde $\sin\varphi \cos\varphi$, ligesom $(x-d)^2$, der indgaaer i Tælleren, maa bortskaffes ved en tilsvarende Faktor i Nævneren. Derfor sættes, med nye ubekjendte Konstanter Q og R,

$$Q\,\frac{x-b}{x-d} = \cos^2\varphi, \qquad R\,\frac{x-c}{x-d} = \sin^2\varphi. \tag{5}$$

Af den sidste (5) faaes

$$2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = R\,\frac{c-d}{(x-d)^2}\,dx,$$

saa at $\frac{d\varphi}{dx}$ har samme Tegn som $R\,(c-d)$, og af (4) og (5) udledes

$$\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\,(k, \varphi) = \pm \sqrt{PQR\,\frac{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}{(x-d)^3}},$$

følgelig

$$\frac{2\,d\varphi}{\Delta\,(k, \varphi)} = \pm \sqrt{\frac{R}{PQ}}\,\frac{(c-d)\,dx}{\sqrt{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)}}.$$

Heri maa bruges det Fortegn, som $R\,(c-d)$ har; men da $c-d$ selv indgaaer som Faktor, maa det foran staaende Fortegn være det, som R har. Man finder saaledes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)}} = \pm \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{PQ}{\varepsilon R}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\,(k, \varphi)}, \tag{6}$$

hvor Fortegnet stemmer med R's.

3. Men endnu ere P, Q, R og k^2 ubekjendte, og de maae tilmed bestemmes saaledes, at k^2, $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\Delta^2\,(k, \varphi)$ falde imellem Grændserne 0 og $+1$, hvorved dog kan erindres, at $1 > k^2 > 0$ og $1 > \sin^2\varphi > 0$ medfører den samme Begrændsning for $\cos^2\varphi$ og $\Delta^2\,(k, \varphi)$. Ifølge disse Funktioners Natur maae (4) og (5) give

$$Q\,\frac{x-b}{x-d}+R\,\frac{x-c}{x-d}=1, \qquad P\,\frac{x-a}{x-d}+k^2 R\,\frac{x-c}{x-d}=1,$$

gjældende for alle Værdier af x. Man har følgelig

$$\left.\begin{aligned} Q+R&=1\\ bQ+cR&=d \end{aligned}\right\} \quad \text{og} \quad \left\{\begin{aligned} P+k^2 R&=1,\\ aP+ck^2 R&=d, \end{aligned}\right.$$

hvoraf findes P, Q, R, $k^2 R$ saaledes

$$P=\frac{d-c}{a-c}, \quad Q=\frac{d-c}{b-c}, \quad R=\frac{b-d}{b-c}, \quad k^2 R=\frac{a-d}{a-c}, \tag{7}$$

og af de to sidste

$$k^2=\frac{a-d}{a-c}\cdot\frac{b-c}{b-d}. \tag{8}$$

Det samme kunde faaes deraf, at $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ved den første (5) giver $x=b$, og dermed R og $\frac{P}{1-k^2}$ (ved den anden (5) og (4)), medens $\varphi=0$ i den anden (5) gjör $x=c$, saa at P og Q kunne findes.

4. Nu kommer det an paa, at a, b, c, d tilfredsstille Betingelserne $1>k^2>0$ og $1>\sin^2\varphi>0$.

Under Forudsætning af, at

$$(a-c)(b-d)>0, \tag{9}$$

vil man faae $k^2>0$, saafremt tillige

$$(a-d)(b-c)>0, \tag{10}$$

og $1>k^2$, saafremt

$$(a-d)(b-c)<(a-c)(b-d),$$

hvilket let omformes til

$$(a-b)(c-d)>0. \tag{11}$$

Da fremdeles (5) og (7) give

$$\sin^2\varphi=\frac{b-d}{b-c}\cdot\frac{x-c}{x-d},$$

saa maae under Forudsætning af, at

$$(b-c)(x-d)>0, \tag{12}$$

følgende Betingelser være opfyldte

$$(b-d)(x-c)>0 \tag{13}$$

og

$$(b-d)(x-c)<(b-c)(x-d)$$

eller

$$(c-d)(b-x)>0. \tag{14}$$

Hvis (9)—(14) gjælde, maae de i de nedenslaaende tre Piller opførte Differenser hver for sig have samme Fortegn.

$$\begin{array}{c|c|c} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ (9)\begin{cases} a-c \\ b-d \end{cases} & (10)\begin{cases} a-d \\ b-c \end{cases} & (11)\begin{cases} a-b \\ c-d \end{cases} \\ (13)\quad x-c & (12)\quad x-d & (14)\quad b-x \end{array}$$

Disse Fordringer fyldestgjöres paa følgende fire Maader.

1) $a > b > x$ og $c > d$ gjöre Differenserne III positive; er nu ogsaa $a > c$, $b > d$, $x > c$, hvorved Diff. I blive positive, saa vil det samme gjælde om dem i II; man har da

$$a > b > x > c > d.$$

2) Hvis derimod foruden $a > b > x$ og $c > d$, haves Diff. I negative eller $c > a$, $d > b$, $c > x$, saa bliver ogsaa i II $b - c$ negativ, saa at man ogsaa bör have $d > a$, $d > x$, følgelig

$$c > d > a > b > x.$$

3) $a < b < x$ og $c < d$, Diff. III negative, kan forenes med $a < c$, $b < d$, $x < c$, som gjöre dem i I og II negative, saa at man faaer

$$a < b < x < c < d.$$

4) Foruden $a < b < x$ og $c < d$ kan haves positive Diff. i I, altsaa $c < a$, $d < b$, $c < x$, følgelig $b - c$ positiv, og dermed bör $d < a$, $d < x$, altsaa

$$c < d < a < b < x.$$

5. Tör man ikke forudsætte (9) og (12) gjældende, saa kunne disse begge have Ulighedstegnet omvendt stillet, og deraf vil da følge Betingelser analoge med (10) og (11), (13) og (14), ligeledes med omvendt Ulighedstegn. Man kan opstille disse sex nye Betingelser saaledes, at de Faktorer, hvori a og x findes, forblive uforandrede, medens de andre faae modsat Tegn, næmlig saaledes

$$(a-c)(d-b) > 0,\ (9')\quad (a-d)(c-b) > 0,\ (10')\quad (a-b)(d-c) > 0,\ (11')$$
$$(c-b)(x-d) > 0,\ (12')\quad (d-b)(x-c) > 0,\ (13')\quad (d-c)(b-x) > 0.\ (14)$$

Som Følge heraf skulle nedenstaaende tre Grupper af Differenser hver for sig have samme Fortegn

$$\begin{array}{c|c|c} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ (9')\begin{cases} a-c \\ d-b \end{cases} & (10')\begin{cases} a-d \\ c-b \end{cases} & (11')\begin{cases} a-b \\ d-c \end{cases} \\ (13')\quad x-c & (12')\quad x-d & (14')\quad b-x \end{array}$$

Dette kan opnaaes paa to Maader.

5) Man kan have $a > b > x$ og $d > c$, hvorved Differenserne III blive positive, og derhos $a > c$, $d > b$, $x > c$, saa at de i I blive positive, medens $c - b$ i II bliver negativ, saa at man maa have $d > a$, $d > x$, altsaa

$$d > a > b > x > c.$$

Derimod kan ikke $a > b > x$ og $d > c$ forenes med negative Differenser i I eller med $c > a$, $b > d$, da det vilde medføre den Urimelighed, at

$$a > b > d > c > a.$$

6) Man kan ogsaa antage $a < b < x$ og $d < c$, hvorved Diff. III blive negative, og derhos $a < c$, $d < b$, $x < c$, saa at Diff. I og $c - b$ i II blive negative og dermed maa fordres $d < a$, $d < x$, saa at

$$d < a < b < x < c.$$

Forenede man Antagelsen om negative Differenser i II, med den om positive i I og hvad deraf følger, kom man til lignende Urimelighed som i 5), næmlig til

$$a < b < d < c < a.$$

6. Fremdeles kan det være muligt, at hverken Forudsætningerne (9) og (12) eller (9') og (12') ere rigtige, idet Produkterne af de deri forekommende Differenser ikke behøve at have samme Tegn. Har man saaledes

$$(a - c)(b - d) < 0, \quad (b - c)(x - d) > 0,$$

hvoraf vil følge, istedenfor (10) og (11), analoge Betingelser med omvendt stillet Uligheds-tegn, men derhos selve de i (13) og (14) angivne Betingelser. Den hele Gruppe opstilles bedst paany, idet blot de Faktorer i (9)—(14), hvori a forekommer, lades uforandrede, medens alle de andre skifte Tegn. Saaledes faaes

$$(a - c)(d - b) > 0, \; (9'') \qquad (a - d)(c - b) > 0, \; (10'') \qquad (a - b)(d - c) > 0, \; (11'')$$
$$(c - b)(d - x) > 0, \; (12'') \qquad (d - b)(c - x) > 0, \; (13'') \qquad (d - c)(x - b) > 0. \; (14'')$$

De tre Grupper af Differenser med ens Tegn blive

$$\begin{array}{c|c|c} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ (9'')\begin{cases} a - c \\ d - b \end{cases} & (10'')\begin{cases} a - d \\ c - b \end{cases} & (11'')\begin{cases} a - b \\ d - c \end{cases} \\ (13'')\;\; c - x & (12'')\;\; d - x & (14'')\;\; x - b \end{array}$$

Ogsaa dette kan opnaaes paa to Maader.

7) $a > c > x$ og $d > b$ gjör Diff. i I positive; har man derhos $a > d > x$ og $c > b$, blive saavel alle Diff. i II, som $a - b$ i III ligeledes positive, og man maa have $d > c$, $x > b$, saa at

$$a > d > c > x > b.$$

Derimod vil $a > c > x$ og $d > b$ i Forbindelse med $x > d > a$ strax føre til den Urimelighed, at

$$x > d > x.$$

8) $a < c < x$ og $d < b$ gjör Diff. i I negative; i Forbindelse dermed kan tages $a < d < x$ og $c < b$, altsaa Diff. i II og $a - b$ i III blive negative, og dermed $d < c$ og $x < b$, altsaa

$$a < d < c < x < b.$$

$a < c < x$, $d < b$ vilde med $x < d < a$ give $x < d < x$.

7. Tilsidst staaer tilbage

$$(a-c)(d-b)>0,\quad (b-c)(x-d)<0,$$

hvormed vil følge (10) og (11), medens Ulighedstegnet i (13) og (14) maa vendes om. Betingelserne fremstilles, ved Forandring af alle Fortegn for Faktorerne i (9)—(14) paa dem nær, der indeholde x, saaledes

$$(c-a)(d-b)>0,\ (9''')\quad (d-a)(c-b)>0,\ (10''')\quad (b-a)(d-c)>0,\ (11''')$$
$$(c-b)(x-d)>0,\ (12''')\quad (d-b)(x-c)>0,\ (13''')\quad (d-c)(b-x)>0,\ (14''')$$

Grupperne med ens Fortegn ville nu være

I	II	III
$(9''')\begin{cases} c-a \\ d-b \end{cases}$	$(10''')\begin{cases} d-a \\ c-b \end{cases}$	$(11''')\begin{cases} b-a \\ d-c \end{cases}$
$(13''')\quad x-c$	$(12''')\quad x-d$	$(14''')\quad b-x$

Hertil knytte sig de to sidste Tilfælde

9) $x>c>a$ og $d>b$ gjör Diff. I positive, og for $x>d>a$ samt $c>b$ blive de i II positive og $b-x$ i III negativ, hvoraf følger $a>b$, $c>d$, og dermed

$$x>c>d>a>b.$$

Antog man Diff. i I positive og dem i II negative, fik man det umulige Resultat

$$a>d>x>c>a.$$

10) $x<c<a$ og $d<b$, hvorved Diff. I blive negative, kan forenes med $x<d<a$ og $c<b$, hvormed de i II blive negative og $b-x$ i III positiv, altsaa $a<b$, $c<d$ og

$$x<c<d<a<b.$$

Diff. i I negative og de i II positive giver en lignende Urimelighed som i 9).

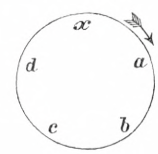
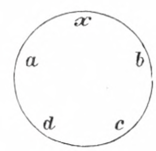
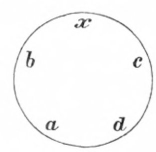
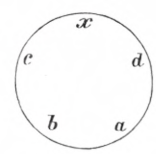
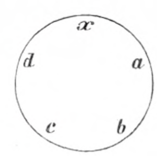
8. Den foregaaende Udvikling lærer,

a) at Substitutionerne (4) og (5) altid føre til Maalet, naar blot Rødderne a, b, c, d i $\mathrm{R}=0$ fordeles rettelig efter deres Störrelse indbyrdes og i Forhold til de Grændser, som efter Integrationen skulle indføres for x og som foreløbig antages begge at falde imellem de samme to i Störrelse paa hinanden følgende Rødder i $\mathrm{R}=0$;

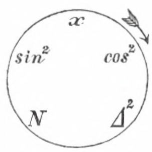
b) at der altid gives to Maader, hvorpaa Ændringen kan iværksættes, idet hver af de fem forskjællige Beliggenheder af x, som störst (4) og 9)), næststörst (6) og 8)), mellemst (3) og 1)), næstmindst (7) og 5)) og mindst (10) og 2)) af de fem Störrelser x, a, b, c, d, forekomme to Gange i de ti angivne Tilfælde;

c) at den ene af disse Ændringer svarer til Variation af φ og x i modsat Retning, $\dfrac{d\varphi}{dx}$ negativ, nemlig i Tilfældene 4), 6), 3), 7) og 10), men den anden til deres Variation i samme Retning, $\dfrac{d\varphi}{dx}$ positiv, i Tilfældene 9), 8), 1), 5) og 2), hvilket hver Gang ses af Fortegnet for $R(c-d)=\dfrac{(b-d)(c-d)}{b-c}$.

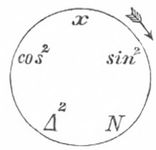
Fuldstændigere Oversigt over Enkelthederne i disse Resultater faaes bedst af en Tavle, hvoraf igjen en let praktisk Regel fremgaaer for den Maade, hvorpaa Störrelserne a, b, c, d skulle fordeles i Tællerne af $\Delta^2(k, \varphi)$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ og deres fælles Nævner N. Tavlens første Pille indeholder Resultaterne 1) — 10), medens den anden indeholder den Ændring i Betegnelserne, at Rødderne i $R = 0$ stedse i Störrelse følge saaledes paa hinanden, at $a > b > c > d$; de følgende fire Piller vise, hvorledes man ifølge en Sammenligning af (4) og (5) med de to første Piller maa fordele a, b, c, d paa Δ^2, $\cos^2$, $\sin^2$ og N; den syvende Pille angiver, hvorledes Fortegnet for $\frac{d\varphi}{dx}$ svarer til de i det foregaaende angivne Tilfælde, og endelig den sidste indeholder x, a, b, c, d ordnede i Kreds efter deres Störrelse, saa at den störste følger paa den mindste:

1.	2.	3. Δ^2	4. $\cos^2$	5. $\sin^2$	6. N	7. $\frac{d\varphi}{dx}$	8.
4) $x > b > a > d > c$	$x > a > b > c > d$	b	a	d	c	$-$	
9) $x > c > d > a > b$		c	d	a	b	$+$	
6) $c > x > b > a > d$	$a > x > b > c > d$	c	b	a	d	$-$	
8) $b > x > c > d > a$		d	a	b	c	$+$	
3) $d > c > x > b > a$	$a > b > x > c > d$	d	c	b	a	$-$	
1) $a > b > x > c > d$		a	b	c	d	$+$	
7) $a > d > c > x > b$	$a > b > c > x > d$	a	d	c	b	$-$	
5) $d > a > b > x > c$		b	c	d	a	$+$	
10) $b > a > d > c > x$	$a > b > c > d > x$	b	a	d	c	$-$	
2) $c > d > a > b > x$		c	d	a	b	$+$	

Indfører man i den kredsformige Opstilling istedenfor a, b, c, d den tilsvarende Overskrift $\varDelta^2$, $\cos^2$, $\sin^2$ og N over Pillerne 3—6, faaes i alle fem Tilfælde for $\frac{d\varphi}{dx}$ negativ



for, $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv



. Desuden kan mærkes, hvad der let ses, at altid den ene Substitution giver for $\sin^2 \left(\frac{\sin^2}{N}\right)$ det samme som den anden for $\frac{\cos^2}{\varDelta^2}$.

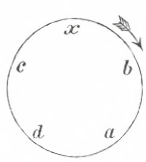
Herved er man kommet til følgende simple Regel:

Integralet (3) bringes paa Formen (2) ved Substitutionen (4) og (5), idet den fælles Nævner N og Tælleren i $\varDelta^2(k, \varphi)$ indeholde de to Rødder i $\mathrm{R} = 0$, som staae overfor x i Kredsstillingen, medens Tællerne i $\cos^2 \varphi$ og $\sin^2 \varphi$ indeholde de to andre, hvis Plads i Kredsstillingen er ved Siden af x, og det saaledes, at de Rødder, der indgaae i Tælleren til $\cos^2 \varphi$ og $\varDelta^2(k, \varphi)$ tages i den fra x aftagende Retning (med Pilen), naar $\frac{d\varphi}{dx}$ skal være negativ, men derimod i den fra x voxende Retning (imod Pilen), naar $\frac{d\varphi}{dx}$ skal være positiv.

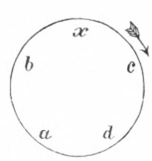
Ved Hjælp af (6), (7), (8) kan nu Resultatet altid gives i følgende Form, idet Grændserne x_0 og x antages at falde ikke udenfor to i Störrelse efter hinanden følgende Rødder i $\mathrm{R} = 0$, og Fortegnet bliver modsat af det for $R(c-d)$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \mp \frac{2}{\sqrt{\varepsilon (a-c)(b-d)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta(k, \varphi)} . \qquad (15)$$

Heri antages φ_0 svarende til x_0, og a, b, c, d betegne igjen de Störrelser, der henholdsvis indgaae i Tællerne af $\varDelta^2$, $\cos^2$, $\sin^2$ og i N, altsaa saaledes, at Kredsstillingerne ere for $\frac{d\varphi}{dx}$ negativ:



; for $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv:



.

9. Dersom Forudsætningen for den foregaaende Udvikling ikke gjælder, saa at Grændserne for x indeslutte een eller flere af Rødderne a, b, c, d i $\mathrm{R} = 0$ imellem sig, gjælder (15) ikke med Hensyn til alle i Intervallet faldende Værdier af x. Men da Integralets Deling i to eller flere kan udføres saaledes, at deres Grændser ikke parvis gaae ud over to i Störrelse paa hinanden følgende Rødder i $R = 0$, som for Ex. $x > b > x_0 > a$ tilsteder Delingen

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R}} = \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{R}} + \int_{b}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R}} \text{ o. s. v.,}$$

saa kan hvert af de saaledes frembragte meget vel behandles efter Formlen (15).

Der bliver ved den praktiske Anvendelse kun at foretage Kredsbytninger af Störrelserne a, b, c, d, der fremkalde let angivelige Forandringer i Koefficienten i (15) og i k^2, foruden den i Grændserne. Er nemlig (15) bragt i Anvendelse paa det ene Integral, hvor x falder imellem et Par Rødder i $R = 0$, saa kan den anvendes paa et andet, hvori x er passeret een af de forrige Grændser ind imellem det næste Par Rødder, som i Störrelse ligger til den ene eller den anden Side af det forrige, idet

$$a,\ b,\ c,\ d \text{ ændres til } b,\ c,\ d,\ a \text{ eller til } d,\ a,\ b,\ c,$$

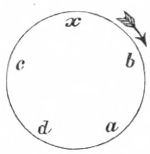
følgelig Koefficienten under Rodtegnet faaer

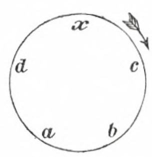
$$(a-c)(b-d) \text{ forandret til } (b-d)(c-a) \text{ eller til } (d-b)(a-c),$$

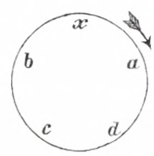
samt

$$k^2 = \frac{a-d}{a-c} \cdot \frac{b-c}{b-d} \text{ til } k^2 = \frac{b-a}{b-d} \cdot \frac{c-d}{c-a} \text{ eller til } k^2 = \frac{d-c}{d-b} \cdot \frac{a-b}{a-c}.$$

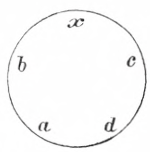
Ændringen i Kredsstillingen, der bestemmer φ, bliver

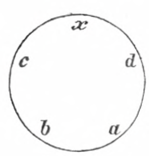
for $\frac{d\varphi}{dx}$ negativ: fra 

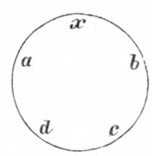
til 

eller til 

,

for $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv: fra 

til 

eller til 

.

Heraf ses dels, hvad ogsaa følger af Differentialets Sammensætning, at Integralet slaaer over fra reelt til imaginært eller omvendt, idet x passerer en af Værdierne a, b, c, d, og dels, hvad den opstillede Tavle ogsaa lærer, at man for $\frac{d\varphi}{dx}$ negativ og x voxende (skudt ind imellem et Par större Rødder i $R = 0$) faaer de samme Ændringer som for $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv og x aftagende (skudt ind imellem et Par mindre Rødder), og omvendt.

10. Er Polynomiet R kun af tredie Grad, $\varepsilon = 0$, vil Fremgangsmaaden ligefuldt kunne bruges; thi der vil i saa Tilfælde kun findes en Rod, som er uendelig og som maa indgaae i Kredsstillingen paa den Plads, der ifølge dens Störrelse maa tilkomme den. Substitutionen kan da udføres med den Afændring, som maa følge af den specielle Værdi for den ene Rod. Der vil næmlig i Udtrykkene for $\Delta^2(k, \varphi)$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$, dannede af (4) og (5) i Forbindelse med (7), stedse indgaae de samme tre af Störrelserne a, b, c, d, i $\Delta^2(k, \varphi)$ c, d, a, i $\cos^2\varphi$ og $\sin^2\varphi$ b, c, d, saa at een af dem ved at blive uendelig reducerer eet eller alle tre Udtryk til blot at indeholde een Differens i Tæller og Nævner, undertiden saaledes, at x forbliver begge Steder (Δ^2 og $\cos^2$ for $c = \infty$, $\sin^2$ for $b = \infty$), undertiden ogsaa saaledes, at x forsvinder det ene Sted (i Tælleren af Δ^2 for $a = \infty$, i Tælleren af $\cos^2$ for $b = \infty$, i Tælleren af $\sin^2$ for $c = \infty$, og i alle Nævnerne for $d = \infty$). Endvidere vil k^2 altid indeholde alle Störrelserne a, b, c, d een Gang baade i Tæller og i Nævner; eftersom a, b, c eller d bliver uendelig, faaes henholdsvis

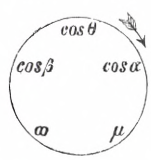
$$k^2 = \frac{b-c}{b-d}, \quad k^2 = \frac{a-d}{a-c}, \quad k^2 = \frac{a-d}{b-d} \text{ eller } k^2 = \frac{b-c}{a-c}.$$

Endelig vil (15) indeholde en Faktor under Rodtegnene paa begge Sider af Ligningen, som bliver uendelig, næmlig paa den ene Side een af Störrelserne $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, og paa den anden een af de to $a-c$ og $b-d$, hvilke derfor kunne bortgaae. Det er saaledes eftervist, at (15) bliver fuldstændig gjældende, naar Polynomiet er af tredie Grad, idet den ene Rod i $R = 0$ gjöres uendelig.

Til Oplysning tilföjes Behandlingen af Integralet

$$S = \int_\delta^\theta \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{-(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta - \cos\beta)(\cos\theta - \mu)}},$$

hvori $\cos\beta > \cos\theta > \cos\delta > \cos\alpha$ og $\mu = -\dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, følgelig $\mu < -1$; det er taget fra Theorien af det koniske Penduls Svingninger (jfr. Durège, Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1861, P. 295). Roddernes Kredsstilling er saadan:



$\dfrac{d\varphi}{dx}$ negativ, $a = \mu$, $b = \cos\alpha$, $c = \cos\beta$, $d = \infty$;

$\dfrac{d\varphi}{dx}$ positiv, $a = \infty$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\alpha$, $d = \mu$.

Heraf udledes følgende to Ændringer:

A. $\dfrac{d\varphi}{dx}$ negativ. I (15) bortgaae $\sqrt{x-d}$ og $\sqrt{b-d}$, man faaer $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{-1}$, $R(c-d) = \dfrac{b-d}{b-c}(c-d)$ negativ, følgelig

$$S = + \frac{2}{\sqrt{\cos\beta - \mu}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} .$$

Heri er da

$$k^2 = \frac{b-c}{a-c} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\mu - \cos\beta} = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{x-c}{b-c} = \frac{\cos\theta - \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta},$$

altsaa

$$\sin^2\varphi_0 = \frac{\cos\delta - \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} .$$

B. $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv. I (15) bortdivideres $\sqrt{x-a}$ og $\sqrt{a-c}$, men derved efterlades Faktoren $\sqrt{-1}$ paa höjre Side, saa at $\sqrt{\varepsilon . -1} = -1$; tillige vil $R\,(c-d)$ være positiv, og derved

$$S = - \frac{2}{\sqrt{\cos\beta - \mu}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} ,$$

hvor

$$k^2 = \frac{b-c}{b-d} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta - \mu} = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{b-d}{b-c} \cdot \frac{x-c}{x-d} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\cos\theta - \mu},$$

og derved

$$\sin^2\varphi_0 = \frac{1}{k^2} \frac{\cos\delta - \cos\alpha}{\cos\delta - \mu} .$$

Indføres Værdien af μ, bliver det endelige Resultat

$$S = \pm 2 \sqrt{\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} ,$$

øverste Fortegn gjældende for $\frac{d\varphi}{dx}$ negativ, nederste for $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv.

11. **B.** Er det forelagte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,((x-m)^2 + n^2)}} , \qquad (16)$$

indføres bedst $\sqrt{1 + k^2 \cos^2\varphi}$ istedenfor $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$, ligesom Richelots Substitution, ved Overgangen fra det irrationale Differential med lige Exponenter for den uafhængige Variable x, i dette Tilfælde er $x = \cos\varphi$, ikke $x = \sin\varphi$ (jfr. Crelle Journ. 34 B. Side 16).

Men da $1+k^2\cos^2\varphi$ nærmest svarer til $(x-m)^2+n^2$, idet begge have imaginære Faktorer af første Grad, maa der for $x-a$ og $x-b$ indbringes andre Störrelser, som tilmed kunne fjerne hvad der indkommer i dx. Dette opnaaes ved at sætte

$$P\frac{x-a}{x-\alpha}=1-\cos\varphi,\quad Q\frac{x-b}{x-\alpha}=1+\cos\varphi,\quad R\frac{(x-m)^2+n^2}{(x-\alpha)^2}=1+k^2\cos^2\varphi, \tag{17}$$

hvor Konstanterne P, Q, R, k^2 og α maae bestemmes. Man faaer af den første (17)

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{P}{\sin\varphi}\,\frac{a-\alpha}{(x-\alpha)^2},$$

saa at Fortegnet for $\frac{d\varphi}{dx}$ er det samme som for $P(a-\alpha)$, forudsat at $\pi>\varphi>0$, og derved bliver

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\varepsilon(x-a)(x-b)((x-m)^2+n^2)}}=\pm\frac{1}{a-\alpha}\sqrt{\frac{RQ}{\varepsilon P}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\cos\varphi}} \tag{18}$$

med det Fortegn, som $P(a-\alpha)$ har.

De her indførte Störrelser bestemmes paa følgende Maade.

12. Adderes de to første (17), faaes, idet Resultatet gjælder for alle x, to Ligninger til Bestemmelse af P og Q ved α; men disse Störrelser findes ogsaa, naar man i den ene af de to første (17) indsætter Værdier af x og φ, som tilfredsstille den anden. $\varphi=0$ og $x=a$, $\varphi=\pi$ og $x=b$ give henholdsvis

$$Q=\frac{2(a-\alpha)}{a-b},\qquad P=\frac{2(\alpha-b)}{a-b}. \tag{19}$$

Fremdeles er

$$PQ\frac{(x-a)(x-b)}{(x-\alpha)^2}=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi,$$

som multipliceret med k^2 og lagt til den tredie (17) giver

$$k^2PQ(x-a)(x-b)+R((x-m)^2+n^2)=(1+k^2)(x-\alpha)^2. \tag{20}$$

Da denne gjælder for alle x, har man

$$\left.\begin{aligned} k^2PQ+R&=1+k^2,\\ -k^2PQ(a+b)-2Rm&=-2(1+k^2)\alpha,\\ k^2PQab+R(m^2+n^2)&=(1+k^2)\alpha^2,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

efter disse Ligningers Multiplikation med henholdsvis a^2, a og 1 eller b^2, b og 1 og Addition frembringes

$$\left.\begin{aligned} R((a-m)^2+n^2)&=(1+k^2)(a-\alpha)^2\\ R((b-m)^2+n^2)&=(1+k^2)(b-\alpha)^2.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Disse kunde ogsaa udledes af (20), naar man satte $x=a$ og $x=b$, eller den tredie (17) for $x=a$ og $\varphi=0$, $x=b$ og $\varphi=\pi$.

Sættes for Kortheds Skyld

$$A=\pm\sqrt{(a-m)^2+n^2},\qquad B=\pm\sqrt{(b-m)^2+n^2},$$

faaes af (22)

$$\frac{A}{a-\alpha} = \frac{B}{b-\alpha} = \sqrt{\frac{1+k^2}{R}} = \frac{A-B}{a-b} = \frac{Ab-Ba}{(a-b)\,\alpha}, \tag{23}$$

følgelig

$$\alpha = \frac{Ab-Ba}{A-B}, \quad a-\alpha = \frac{A\,(a-b)}{A-B}, \quad b-\alpha = \frac{B\,(a-b)}{A-B} \tag{24}$$

og dermed

$$P = -\frac{2\,B}{A-B}, \quad Q = \frac{2\,A}{A-B}. \tag{25}$$

Endvidere giver (23) og den første (21)

$$\frac{1+k^2}{(A-B)^2} = \frac{R}{(a-b)^2} = \frac{k^2\,PQ}{(A-B)^2-(a-b)^2}.$$

Men da man ved en let Beregning faaer, efter Indførelse af et nyt Tegn C,

$$(A-B)^2-(a-b)^2 = 2\,((m-a)\,(m-b)+n^2-AB) = 2\,(C^2-AB),$$

saa er, efter Anvendelse af Værdierne (25) for P og Q,

$$\frac{1+k^2}{(A-B)^2} = \frac{R}{(a-b)^2} = \frac{-2\,ABk^2}{(A-B)^2\,(C^2-AB)} = \frac{2\,AB}{(A-B)^2\,(C^2+AB)}. \tag{26}$$

Derved finder man altsaa

$$R = \frac{2\,AB\,(a-b)^2}{(A-B)^2\,(C^2+AB)},$$

$$k^2 = -\frac{C^2-AB}{C^2+AB}.$$

Da imidlertid disse Udtryk have en irrational Nævner, saa gives denne for k's Vedkommende den rationale Form

$$C^4-A^2B^2 = ((m-a)\,(m-b)+n^2)^2-((m-a)^2+n^2)\,((m-b)^2+n^2) = -n^2\,(a-b)^2,$$

hvorved man kommer til

$$k^2 = \frac{(C^2-AB)^2}{n^2\,(a-b)^2}. \tag{27}$$

Koefficienten paa höjre Side i (18) bliver

$$\frac{1}{a-\alpha}\sqrt{\frac{QR}{\varepsilon P}} = \sqrt{-\frac{2}{\varepsilon\,(C^2+AB)}} = \frac{1}{n\,(a-b)}\sqrt{\frac{2\,(C^2-AB)}{\varepsilon}}. \tag{28}$$

13. Til Bestemmelse af φ er det en nødvendig Betingelse, at

$$\sin^2\varphi = \frac{-4\,AB}{(A-B)^2}\,\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-\alpha)^2}$$

falder indenfor Grændserne 0 og 1, hvorved ogsaa $1-\cos\varphi$ og $1+\cos\varphi$ faae Værdier svarende til reelle φ. Derimod er der ingen Grændser nødvendige for k^2, fordi ikke denne Störrelse, men $\frac{k^2}{1+k^2}$ bliver Modulus i Normalformen. Naar A og B have ens Tegn, vil $\sin^2\varphi$ ikke blive positiv, med mindre x falder imellem a og b; have A og B modsatte Tegn, maa x falde udenfor disse Grændser. I første Tilfælde faae $a-\alpha$ og $b-\alpha$ ogsaa ens Tegn, saa at α falder udenfor Grændserne a og b, naar x falder imellem dem; omvendt forholder det sig i det andet Tilfælde. Det kommer altsaa blot an paa, om

$$-4\,AB\,(x-a)\,(x-b) < (A-B)^2\left(x-\frac{Ab-Ba}{A-B}\right)^2$$

eller

$$-4\,ABx^2+4\,AB\,(a+b)\,x-4\,AB\,ab < ((A-B)\,x-(Ab-Ba))^2;$$

men dette omskrives let til

$$0 < ((A+B)\,x-(Ab+Ba))^2,$$

som er rigtigt.

14. For Oversigtens Skyld fastsættes bekvemmest Tegnenes Betydning saaledes, at $a > b$. Man vil da have de følgende to Tilfælde:

1) $a > x > b$, $AB > 0$, $a-b > 0$. Man kan her tage

$$A = +\sqrt{(a-m)^2+n^2}, \qquad B = +\sqrt{(b-m)^2+n^2},$$

saa at

$$\frac{1}{a-\alpha}\sqrt{\frac{QR}{\varepsilon P}} = \frac{1}{(a-b)\,n}\sqrt{\frac{2\,(C^2-AB)}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{(a-b)\,n}\sqrt{2\,\frac{(a-m)\,(b-m)+n^2-\sqrt{((a-m)^2+n^2)\,((b-m)^2+n^2}}{\varepsilon}},$$

og

$$P\,(a-\alpha) = -\frac{2\,AB\,(a-b)}{(A-B)^2} < 0$$

giver

$$\frac{d\varphi}{dx}\ \text{negativ.}$$

2) $a > b > x$ eller $x > a > b$, $AB < 0$, $a-b > 0$. Man kan tage

$$A = +\sqrt{a-m)^2+n^2}, \qquad B = -\sqrt{(b-m)^2+n^2},$$

hvorved faaes

$$\frac{1}{a-\alpha}\sqrt{\frac{QR}{\varepsilon P}} = \frac{1}{(a-b)\,n}\sqrt{2\,\frac{(a-m)\,(b-m)+n^2+\sqrt{((a-m)^2+n^2)\,((b-m)^2+n^2)}}{\varepsilon}}$$

samt

$$P\,(a-\alpha) > 0,\ \text{som giver}\ \frac{d\varphi}{dx}\ \text{positiv.}$$

Man finder derved

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}}}=\mp\frac{1}{(a-b)\,n}\sqrt{2\frac{(a-m)(b-m)+n^2\mp\sqrt{((a-m)^2+n^2)((b-m)^2+n^2)}}{\varepsilon}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}},\\&\text{idet (27) giver}\\&k^2=\frac{[(a-m)(b-m)+n^2\mp\sqrt{((a-m)^2+n^2)((b-m)^2+n^2)}]^2}{(a-b)^2\,n^2}\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

med øverste eller nederste Fortegn overalt, eftersom $\frac{d\varphi}{dx}$ er negativ eller positiv.

15. Falde Integralets Grændser ikke begge imellem eller begge udenfor de reelle Rødder a og b i $\mathrm{R}=0$, kan (29) ikke ligefrem anvendes, men Integralet maa deles paa samme Maade som i 9 er udviklet, hvorefter (29) anvendes med de øverste Fortegn for det Integral, hvis Grændser falde ikke udenfor a og b, og med de nederste Fortegn for det eller de Integraler, hvis Grændser ligge udenfor a og b.

16. Hvis Polynomiet R i (16) kun er af tredie Grad, altsaa $\varepsilon=0$, saa kan man antage $a=\infty$ og dermed $A=\infty$, men $\frac{A}{a}=1$. Derved bliver (23) til

$$\sqrt{\frac{1+k^2}{R}}=1=\frac{B}{b-\alpha},\tag{30}$$

saa at

$$R=1+k^2,\quad b-\alpha=B,\quad \alpha=b-B,\tag{31}$$

og endvidere

$$Q=2,\qquad P(a-\alpha)=-\frac{2\,AB\,(a-b)}{(A-B)^2}=-2\,B.\tag{32}$$

Af (26) udledes dernæst

$$1+k^2=\frac{2}{\frac{C^2}{AB}+1},$$

men da $a=\infty$, bliver

$$\frac{C^2}{AB}=\frac{b-m}{B}$$

og derved faaer man

$$\frac{1+k^2}{2B}=\frac{1}{B+b-m}=\frac{k^2}{B-b+m},$$

følgelig

$$k^2=\frac{B-(b-m)}{B+(b-m)}=\frac{(B-(b-m))^2}{n^2}>0,\tag{33}$$

$$R=1+k^2=\frac{2\,B}{B+b-m}.\tag{34}$$

Fremdeles vil, idet $P = -\dfrac{2B}{a-\alpha}$,

$$1-\cos\varphi = \frac{2B}{x-\alpha},\qquad 1+\cos\varphi = 2\frac{x-b}{x-\alpha},\qquad \sin^2\varphi = \frac{4B(x-b)}{(x-\alpha)^2}.$$

Er nu $x > b$, maa man tage B positiv, medens $x < b$ kræver B negativ, for at $\sin^2\varphi > 0$. Derimod vil altid faaes $\sin^2\varphi < 1$, thi af

$$4B(x-b) < (x-\alpha)^2 = (x-b+B)^2,$$

faaes let

$$0 < (x-b-B)^2,$$

som er rigtig.

I (18) bortgaaer $\sqrt{x-a}$ paa den ene Side imod $\sqrt{a-\alpha}$ paa den anden, dog saaledes, at Nævneren paa höjre Side faaer Faktoren $\sqrt{-1}$. Koefficienten til det elliptiske Integral i (18) bliver endvidere ændret til

$$\sqrt{-\frac{QR}{P(a-\alpha)}} = \sqrt{\frac{2}{B+b-m}} = \sqrt{\frac{2(b-m-B)}{-n^2}}$$

og Tilfældene 1) og 2) i 14 blive her

1) $\infty > x > b$, $B = +\sqrt{(b-m)^2+n^2}$, $P(a-\alpha) = -2B < 0$, $\dfrac{d\varphi}{dx}$ negativ;

2) $\infty > b > x$, $B = -\sqrt{(b-m)^2+n^2}$, $P(a-\alpha) > 0$, $\dfrac{d\varphi}{dx}$ positiv.

Man faaer da det endelige Resultat

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\delta(x-b)\,((x-m)^2+n^2)}} &= \mp\sqrt{\frac{2(b-m)\mp\sqrt{(b-m)^2+n^2}}{-\delta n^2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}},\\ k^2 &= \left(\frac{-(b-m)\pm\sqrt{(b-m)^2+n^2},}{n}\right)^2,\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

øverste eller nederste Fortegn overalt, eftersom $\dfrac{d\varphi}{dx}$ er negativ eller positiv.

17. For Fuldstændigheds Skyld tilföjes her den bekjendte Ændring af Integralerne i (18), (29) og (35) til Normalformen for det elliptiske Integral af første Orden, næmlig

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{k^2}{1+k^2}\sin^2\varphi}},$$

og deri haves ifølge (26)

$$\frac{k^2}{1+k^2} = \frac{AB-C^2}{2AB},\qquad \frac{1}{1+k^2} = \frac{2AB}{AB+C^2},$$

hvilke altid ere positive, da AB er numerisk större end C^2 (jfr. 12) og AB saaledes bestemmer saavel Tællerens, som Nævnerens Fortegn.

18. C. Integralet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\,((x-m)^2+n^2)\,((x-p)^2+q^2)}} \tag{36}$$

lader sig med större Lethed end (3) og (16) bringe paa Normalformen for det elliptiske Integral af første Art. Sætter man nemlig

$$\left.\begin{aligned} x-m=n\operatorname{tg}\varphi,\quad (x-m)^2+n^2=\frac{n^2}{\cos^2\varphi},\quad \frac{dx}{d\varphi}=\frac{n}{\cos^2\varphi} \\ (x-p)^2+q^2=(m-p+n\operatorname{tg}\varphi)^2+q^2, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

og indfører sin og cos for tg, saa faaes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon\,((x-m)^2+n^2)\,((x-p)^2+q^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{((m-p)\cos\varphi+n\sin\varphi)^2+q^2\cos^2\varphi}}.$$

Udføres Beregningerne i Nævneren og indføres $\cos 2\varphi$ for $\sin^2\varphi$ og $\cos^2\varphi$, samt $\sin 2\varphi$ for $\sin\varphi\cos\varphi$, faaer man Integralet ændret til Formen

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\int \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha+\beta\cos 2\varphi+\gamma\sin 2\varphi}},$$

idet

$$(m-p)^2+q^2+n^2=\alpha,\quad (m-p)^2+q^2-n^2=\beta,\quad 2(m-p)n=\gamma. \tag{38}$$

Som bekjendt behandles dette først ved Substitutionen

$$\frac{\gamma}{\beta}=\operatorname{tg}\mu,$$

hvorved det bliver til

$$\sqrt{\frac{\cos\mu}{2\varepsilon}}\int \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{\alpha\cos\mu+\beta\cos(2\varphi-\mu)}}$$

og derefter sættes

$$2\varphi-\mu=2\psi^{*)},\quad \cos 2\psi=1-2\sin^2\psi, \tag{39}$$

saa at man faaer

$$\sqrt{\frac{\cos\mu}{2\varepsilon}}\int \frac{2\,d\psi}{\sqrt{\alpha\cos\mu+\beta-2\beta\sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{\cos\mu}{2\varepsilon(\alpha\cos\mu+\beta)}}\int \frac{2\,d\psi}{\sqrt{1-\dfrac{2\beta}{\alpha\cos\mu+\beta}\sin^2\psi}}.$$

Men heri skal Modulus's Qvadrat

$$\frac{2\beta}{\alpha\cos\mu+\beta}=\frac{2\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} \tag{40}$$

være mindre end 1. Dertil kræves, at

$$\beta^2+\gamma^2<\alpha^2$$

---

*) Denne Modifikation i Jacobis Behandling af et almindeligere Integral (Crelle Journ. 8 B. P. 253) findes hos Ramus (Diff. og Int. Regn. P. 61).

eller

$$((m-p)^2+q^2-n^2)^2+4(m-p)^2n^2<((m-p)^2+q^2+n^2)^2,$$

som igjen omskrives til

$$4(m-p)^2n^2<4((m-p)^2+q^2)n^2,$$

hvilket er rigtigt. Endvidere haves

$$\frac{\cos\mu}{\alpha\cos\mu+\beta}=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},$$

saa at man tilsidst efter Indførelse af Værdierne (38) for α, β og γ faaer

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\varepsilon((x-m)^2+n^2)((x-p)^2+q^2)}}=\\
&\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon((m-p)^2+q^2+n^2+\sqrt{((m-p)^2+q^2-n^2)^2+4(m-p)^2n^2})}}\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{2\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\\
&\text{idet (40) giver}\\
&k^2=\frac{2\sqrt{((m-p)^2+q^2-n^2)^2+4(m-p)^2n^2}}{(m-p)^2+q^2+n^2+\sqrt{((m-p)^2+q^2-n^2)^2+4(m-p)^2n^2}}\\
&\text{og (37) i Forbindelse med (39)}\\
&x-m=n\,\mathrm{tg}\left(\psi+\frac{\mu}{2}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Det ses iøvrigt let, at der kun er meget ringe Forskjæl paa den her givne Ændring af Integralet (36) og den, som findes hos Richelot (Crelle Journ. 34 B. Side 18, Tavle 5).

1869.